数理解析研究所講究録
621巻 1987年 136-149 6

Normal Graded rings について
(Divisor class group, regularity)

東海大・理・情報数理 渡辺 敬一
(Kei-ichi Watanabe)

Normal graded rings の class group について，筆者は Demazure の構成法 [3] を用いて，体上有限生成の場合 [9]，Rees 環の場合 [10] について計算してみたが，良く考えてみれば，この結果は一般の normal graded rings に対して成立するものであった。また，$R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$ で R_0 が体のとき，R がいつ孤立特異点をもつかを Demazure の構成法の言葉であらわすのは，以前から気になっていた事だが，この問題は，$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ がいつ regular となるか？に帰着される。以上の2つのトピックを扱うのが本稿の目的である。

§1. Normal graded rings とその Proj.

本稿で扱う ring はすべて Noetherian とする。
Notation を次のように定める。

(1.1) $R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$: normal graded ring

$X=\mathrm{Proj}(R)$, $\mathcal{O}_X(n) = R(n)^{\sim}$

$D_+(f)=\{\mathfrak{p}\in X \mid f\notin \mathfrak{p}\}$ (f は R の homogeneous element,

$D_+(f)=\mathrm{Spec}((R_f)_0)$, $H^0(D_+(f),\mathcal{O}_X(n)) = (R_f)_n$).

$Y=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{O}_X(n))$, $Y'=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(n))$.

R は R_0 上有限生成だから，ある N に対して，$R^{(N)}=\bigoplus_{n\geq 0}R_{nN}$ は R_0 上 R_N で生成されている([1], §1, Lemme 2). ゆえに，この N に対して，$\mathcal{O}_X(n+N)=\mathcal{O}_X(n)\cdot\mathcal{O}_X(N)\cong \mathcal{O}_X(n)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(N)$ ($\forall n\in\mathbb{Z}$). Y' は Y の open subset, $Y-Y' := S \cong V(\bigoplus_{n>0}\mathcal{O}_X(n)) \cong X$ である.

$Z=\mathrm{Spec}(R)$, $R_+=\bigoplus_{n>0}R_n$ とおくと，$f\in R_n$, $n>0$ について，$H^0(D_+(f),\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(n)) = R_f$ だから，$Y'\cong Z-V(R_+)$

これらの事実をまとめると次の可換図式を得る.

$$
(1.2)\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook, "\text{open}"] & Z-V(R_+) \arrow[d, hook, "\text{open}"] \\
S \arrow[r, hook, "\text{closed}"] \arrow[dr, "\sim"'] & Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"] & Z=\mathrm{Spec}(R) \arrow[d, "\pi'"] \\
 & X=\mathrm{Proj}(R) \arrow[r, "\psi"] & W:=\mathrm{Spec}(R_0)
\end{tikzcd}
$$

ここで ϕ, ψ は projective morphism である. ([8], (1.1), [10] 参照).

R が normal だから，X, Y は normal. また，ϕ は

birational で，$H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ は R 上 finite より，$H^0(Y, \mathcal{O}_Y)=R$

我々の状況ではいろいろな種類の graded ring が現われるが，まず，素イデアル R_+ の高さによって分類される．($R_+ \neq 0$ と仮定する．) $\mathrm{ht}(R_+) = \dim R$ のときは，R_0 が体の場合だが，その対極にあるのが $\mathrm{ht}(R_+)=1$ の場合である。なお，便宜上，次の同値な仮定をおく事にしよう．

(a) R の商体は次数 1 の同次元で $\neq 0$ なものをもつ．

(b) $R_n \neq 0$，$R_{n'} \neq 0$ で $(n, n')=1$ なる n, n' が存在する．

(c) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mathcal{O}_X(n) \neq 0$．

(次数をつけかえれば，R は必ずこの仮定をみたす．)

(1.3) 次の条件は同値

(a) $\mathrm{ht}(R_+)=1$

(b) ψ は birational

(c) R はある Rees 環と同型．即ち，$R \cong \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}_n \cdot T^n$，$\mathfrak{a}_n$ は R_0 の fractional ideal．

(証明) (a) ⇒ (c)．K を R_0 の商体とし，S を R の $R_0 - \{0\}$ による localization（即ち，R_+ に於れる homogeneous localization）とすると，$S_0 = K$，S は 1 次元 normal より regular．$\underbrace{\text{regular}}_{\text{positively graded}}$ graded ring R で $\underbrace{R_0 = K}_{\text{なるものは}}$ K 上の多項式環だから [5]、　$S = K[T]$，$T \in S_1$．

(b) ⇔ (c)，(c) ⇒ (a) はあきらかであろう．

さて，［3］によるRの構成法を復習しよう。$R = H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ だから，Yが決まればRが決まる。TをRの商体のdegree 1の同次元とすると，$\mathcal{O}_X(n) = \mathfrak{a}_n \cdot T^n$ とかける．$\mathfrak{a}_n \subset k(X)$ （Xの函数体），$\mathcal{O}_X(n)$ はreflexiveだから，$\mathfrak{a}_n$ はdivisorialである．YでのTのdivisorを考えると，$\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} k(X) \cong k(X)[T]$ だから，$\mathrm{div}_Y(T)$ は $S + (\text{fibre}\ \overset{\pi\text{に関して}}{方向}の\ \text{divisor})$ の形である。$\mathrm{div}_Y(T) = S + E = S + \pi^*(D)$ と書く。但し，一般には π は分岐するので，Dは有理数係数（即ち，$\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元）となる。つまり，$V \subset X$，codim. 1，irreducible closed subvar. に対して，$F_V = (\pi^{-1}(V)$ にreduced structureを与えたもの）とすると，$\pi^* : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(Y)$ は $\pi^*(V) = q_V \cdot F_V$，$E = \sum p_V \cdot F_V$ のとき，$D = \sum p_V/q_V \cdot V$ となる．

$f \in k(X)$，open set $U \subset X$ をとるとき，$\pi^*(f) \cdot T^n \in H^0(U, \mathcal{O}_Y)$

$\Leftrightarrow \mathrm{div}_{\pi^{-1}(U)}(\pi^*(f)) + n \cdot \mathrm{div}_Y(T)|_{\pi^{-1}(U)} \geqq 0$

$\Leftrightarrow \pi^*(\mathrm{div}_U(f)) + n \cdot E|_{\pi^{-1}(U)} \geqq 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}_U(f) + n \cdot D|_U \geqq 0$

となる。従って，$\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(nD) \cdot T^n$，即ち，$\mathfrak{a}_n = \mathcal{O}_X(nD)$ である事がわかる。ここで，上記の分岐指数 q_V が問題になるが，$Y = \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD) \cdot T^n)$ として再構成してみると，上記の p_V と q_V は互いに素でなければならない事がわかる。(1.1) のNに対して，$\mathcal{O}_X(N) = \mathcal{O}_X(ND) \cdot T^N$ はampleだから，

まとめると，

<u>定理</u> (1.4). (Demazure [3]) normal Noetherian graded ring $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ と R の商体の homogenous, degree 1 の元 T の組 (R, T) と，(X, D)，X は normal Noetherian scheme，$D \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$，$\exists N > 0$，$ND$ は ample Cartier divisor の組は 1 対 1 に対応する．

以下，$R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n$ と書く事にする。

<u>注.</u> ([5], Chapter 5, §1). 上の状況で，D 自身が ample Cartier divisor である事は次の条件 (#) と同値である．

(#) $\exists d_0$，$\forall d \geq d_0$，$R^{(d)}$ は R_0 上 R_d で生成される．

<u>例.</u> (i) $R = k[x, y, z]/(z^2 - x^3 - y^3)$ $(x, y \in R_2,\ z \in R_3)$ のとき，$R^{(d)}$ が R_d で生成される $\Longleftrightarrow$ d は偶数.

(ii) $R = k[x, y, z]/(z^2 - x^3 - y^6)$ $(x \in R_2,\ y \in R_1,\ z \in R_3)$ のとき，$R^{(d)}$ が R_d で生成される $\Longleftrightarrow$ $d \geq 3$.

(ii) では D が Cartier divisor，(i) では $2D$ が Cartier divisor だが，D はそうでない．

§2. Divisor class group, canonical class.

以下の R の divisor class group の計算は [9] のものと同じである。(ただ，余計な仮定をしなければ良い)．

HDiv(Y), HP(Y) 等で, Y上の homogenous divisor, homogeneous principal divisor ("homogeneous" は grading $\mathcal{O}_Y = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)$ に関して) の群をそれぞれあらわす。R, Y′ についても同様である. Samuel [11] により, $Cl(R) \cong HDiv(R)/HP(R)$ が知られている。また, $k(Y) = k(X)(T)$ だから, $HP(Y) = P(X) \oplus \mathbb{Z}\, div_Y(T)$ である. また, $H.Div(Y') = HDiv(Y)/\mathbb{Z}\cdot div_Y(T)$ である。

$ht(R_+) = 1$ のときと, $ht(R_+) > 1$ のときで, $Cl(R)$ の計算方法は異ってくる。

(2.1) (i) $ht(R_+) > 1$ のとき, $Cl(R) \cong Cl(Y')$

(ii) $ht(R_+) = 1$ のとき, $Cl(R) \cong Cl(Y)$

(証明) divisor class group は codimension 2 以上の subset を除いても同型だから, $ht(R_+) > 1$ のとき, $Cl(R) \cong Cl(Z - V(R_+)) \cong Cl(Y')$, $ht(R_+) = 1$ のとき, R は Rees 環だから, (1.2) の φ は codimension 2 以上の subspaces を除いて同型. ゆえに $Cl(R) \cong Cl(Y)$.

(2.2) Y, Y′ の divisor class group は次の図式で計算できる。

(2.2.1)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & Div(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & Cl(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & HP(Y') \arrow[r] \arrow[d] & HDiv(Y') \arrow[r] \arrow[d] & Cl(Y') \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbb{Z}\cdot div_{Y'}(T) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & \bigoplus_{v} \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$(\alpha'(1) = (p_v \bmod q_v)_v \in \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z}).$

$$
(2.2.2)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P(X) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & Cl(X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & HP(Y) & \longrightarrow & H\mathrm{Div}(Y) & \longrightarrow & Cl(Y) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}\oplus(\bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z}) & \to & \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

$(\alpha(1) = (1, (p_v \bmod q_v)_v) \in \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z})).$

<u>定理</u> (2.3). ([9](1.6), [8](2.7)).

(i) $ht(R_+) > 1$ のとき, $Cl(R)$ は次の完全列で決る.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} Cl(X) \longrightarrow Cl(R) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha') \to 0$$

但し, $\theta(1) = cl(LD)$, L は $\{q_v \mid V \subset X\}$ の最小公倍数.

(ii) $ht(R_+) = 1$ のとき, $Cl(R)$ は次の完全列で与えられる.

$$0 \to Cl(X) \to Cl(R) \longrightarrow \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} \to 0$$

<u>系</u> (2.4). (i) $ht(R_+) > 1$ のとき, R が factorial

$\Longleftrightarrow$ $Cl(X)$ は LD で生成される巡回群, $\{q_v \mid V \subset X\}$ は pairwise に互いに素.

(ii) $ht(R_+) = 1$ のとき,

R が factorial $\Longleftrightarrow$ R_0 が factorial, $R \cong R_0[T]$.

<u>問</u>. factorial な graded ring はどんなものか? と考え

る。$\dim R = 2$, R_0 が代数閉体の場合には[6]で分類されている。$\dim R = 3$, $\mathrm{ht}(R_+) = 2$, R_0 が local ring とするとどうなるだろうか? $X = \mathrm{Proj}(R)$ は $\mathbb{P}^1_{R_0}$ の他にどの位の可能性があるだろうか?

次に、canonical class を計算しよう。[9], §2 に於て、次が示されている。(K_X で X の canonical divisor を、ω_X, ω_Y で dualizing sheaf をあらわす。$\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ である。)

(2.5) $\omega_Y = \bigoplus_{n>0} \mathcal{O}_X\left(K_X + \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V + nD\right) . T^n$

(2.6) K_R (R の canonical module) が free $\Leftrightarrow$

(i) $\mathrm{ht}(R_+) > 1$ のとき, $\exists a \in \mathbb{Z}$, $\exists f \in k(X)$,

$$K_X + \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V = aD + \mathrm{div}_X(f)$$

(ii) $\mathrm{ht}(R_+) = 1$ のとき, $\exists f \in k(X)$, $K_X + \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V + D = \mathrm{div}_X(f)$.

例 (2.7). A を D.V.R., v を A の valuation とする.

$$R = A\left[f . T^n \mid n \geqq 0,\ v(f) \geqq -\frac{p}{q} \cdot n\right]$$

とおくと, (p と q は互いに素とする)。$X = \mathrm{Spec}(A)$, $D = \frac{p}{q} \cdot V$ として (2.6) (ii) を適用できるから, R が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $p \equiv 1 \pmod q$.

実際, $p = cq + 1$ とし, A の極大イデアルの生成元を x とすると, $R = A[x^{-c}. T, x^{-cq-1} T^q] \cong A[Y, Z]/(Y^q - xZ)$.

§3. $\mathbb{Z}$-graded regular graded rings.

$R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$ が positively graded のとき，R が regular なら，R_0 は regular である（[2], 1.11）．しかし，$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ が $\mathbb{Z}$-graded のとき，R_0 は一般には regular でない．実際，

例（3.1）.(i) $R=k[x,y,u,v]$，ここで k は体，$x,y\in R_1$，$u,v\in R_{-1}$ とすると，R_0 は $k[x,y]$ と $k[u,v]$ の Segre product で regular ではない．

(ii) $A=k[x,y,z]/(y^2-xz)\cong k[s^2,st,t^2]$，$\mathfrak{p}=(x,y)$ とおく．$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{p}^{(n)}T^n$（但し，$\mathfrak{p}^{(-n)}=(\mathfrak{p}^{(n)})^{-1}$ とする）とおくと，$\mathfrak{p}^{(2)}=(x)$ だから，

$$R=A[xT,yT,xT^2,x^{-1}T^{-2}]=k[T^{-1},yT,xT^2,(xT^2)^{-1}]$$

となり regular である。

$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ が regular のとき，R_0 はどういう性質で特徴づけられるか？というのが目的である。

この問題は，体 k 上の $\overbrace{\text{normal}}$ graded ring，$R=R(X,D)$，（$R_0=k=H^0(X,\mathcal{O}_X)$）が isolated singularity をもつような，(X,D) はどのように特徴づけられるか？という応用をもつ。即ち，R が isolated singularity $\Longleftrightarrow$ Y' は regular であり，$\mathcal{O}_{Y'}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(n)$ であるから，$\mathcal{O}_{Y'}$ は $\mathcal{O}_X$ 上の $\mathbb{Z}$-graded ring である。

以下に於て，$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ は regular graded ring，$R_0=A$ は local ring，A の maximal ideal を $\mathfrak{m}$ とする．

(3.2). R は factorial

(証明) [以下の証明は後藤四郎氏による]．

Lemma (3.3). (一般に)，$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ は graded ring，$R_0=(A,\mathfrak{m})$ local とする．このとき R は unique homogeneous maximal ideal $\mathfrak{M}$ をもち，

(i) R が次数が 0 でない homogeneous unit をもつとき，$R/\mathfrak{M} \cong A/\mathfrak{m}[T,T^{-1}]$，$\deg(T)=N>0$．

(ii) R が次数が 0 でない homogeneous unit をもたないとき，$R/\mathfrak{M} \cong \underline{A/\mathfrak{m}}$．

(証明は容易なので省略)．

((3.2) の証明) R の height 1 の homogeneous prime ideal $\mathfrak{p}$ をとる．$R_{\mathfrak{M}}$ は regular local ring より，$\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{M}}$ は単項．ゆえに $\mathfrak{p}$ も単項である．

問. (3.3) (ii) の場合に，R_0 はどんな性質をもつだろうか？ R が標数 0 の体上 ess. of finite type の場合などには，Boutot の定理 (Grauert - Riemenschneider vanishing Theorem を使う) により R_0 は rational singularity，従って Cohen - Macaulay だが，Noetherian の仮定だけで R_0 が Cohen - Macaulay が出るだろうか？

以下，$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ は regular graded ring，$R_0=(A,\mathfrak{m})$ は local ring，$\exists f\in R_N$ $(N>0)$ unit とする．N は unit が存在するような最小の整数とする。標数 0 のとき，A は位数 N の cyclic group による invariant subring なのだが，一般の場合にも "cyclic quotient singularity" の概念を拡張しておこう．

<u>Proposition-Definition</u> (3.4). 体 $k\cong A/\mathfrak{m}$ を含む d 次元 local ring $(A,\mathfrak{m})$ と，正整数 N に対し，次の条件は同値．このとき A を "cyclic quotient singularity" と呼ぶ．

(i) $\mathbb{N}^d$ の normal subsemigroup

$$H=\{(s_1,\dots,s_d)\in\mathbb{N}^d \mid \textstyle\sum_{i=1}^d a_i s_i\equiv 0 \pmod N\}$$

$((a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{Z}^d)$ が存在して，$\hat{A}\cong k[[T_1^{s_1}\cdots T_d^{s_d}\mid (s_1,\dots,s_d)\in H]]$，更に，$T_1,\dots,T_d$ は A 上 integral．

(ii) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-graded な A の over ring $B=\bigoplus_{n=0}^{N-1}B_n$ で，$B_0=A$，B は regular local ring，極大 ideal $\mathfrak{n}$ で，$B_1,\dots,B_{N-1}\subset\mathfrak{n}$ なるものが存在する．

(証明) (i) ⇒ (ii) $\hat{B}=k[[T_1,\dots,T_d]]$ は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-graded ring で $T_1,\dots,T_d$ は $\hat{B}$ の homogeneous element と思える．$B=A[T_1,\dots,T_d]$ とおくと，$\hat{B}=k[[T_1,\dots,T_d]]$ だから，B は regular local ring．$B_0=A$ だから，(ii) の条件がみたされる。

(ii) ⇒ (i) $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}+(B_1,\dots,B_{N-1})$ と与えられる。$\mathfrak{m}, B_1,\dots,B_{N-1}$

がすべて $\mathfrak{n}^2$ に含まれるという事はないから，homogeneous な t_1, $t_1 \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$ をとる事ができる。B/t_1B も $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-graded regular local ring だから，この操作を続けて，homog. な元よりなる B の regular parameter system $(t_1, \cdots, t_d)$ がとれる。$t_i \in B_{a_i}$ とすれば，$\hat{B} = k[[t_1, \cdots, t_d]]$，$\hat{A} = \hat{B}_0$ は (i) のようになる。

定理 (3.5). $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ が regular graded ring，前頁の仮定をみたすとき，R_0 は "cyclic quotient singularity".

（証明）（本質的に Flenner [4]）.

$B = R/(f-1)R$ とおく。B は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-graded ring，$B_0 = A$ だから，B が regular local ring である事を示せば十分. local は N の最小性より容易に得られる。

$\alpha : R \longrightarrow B[U, U^{-1}]$ を，$\alpha(g) = \{g \bmod (f-1)R\} \cdot U^m$ $(g \in R_m)$ で定義すると，$B[U, U^{-1}] \cong R[U]/(U^N - f) \cdot R[U]$ が容易にわかる。$B[U, U^{-1}]$ が regular を示せば良い. さて，$\mathfrak{m}$ を R の唯一つの graded maximal ideal とすると，

$\left(R[U]/(U^N-f)\cdot R[U]\right) \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong (R/\mathfrak{m})[U]/(U^N - f) \cong k[f, f^{-1}, U]/(U^N - f) \cong k[U, U^{-1}]$. $R \longrightarrow R[U]/(U^N-f)R[U]$ はあきらかに flat だから，$R[U]/(U^N-f)\cdot R[U]$ が regular が云える。

さて，このような R は A の fractional divisor D によって，$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A(nD) \cdot T^n$ と書ける。$R_N = f \cdot A$ だから，$A(ND) = (f/T^N)$.

である。($D\in \mathrm{Div}(A)$ ならば，D は fractional ideal $\mathfrak{a}$ と対応し，$R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{a}^{(n)}\cdot T^n$ と書けるのだが，$D\in \mathrm{Div}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ なので，$A(nD)$ という notation を使わせて頂く.)

(3.6). $R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A(nD)$ が regular なら，$Cl(A)$ は LD で生成された cyclic group.

(証明) (2.2.1) を $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y'=\mathrm{Spec}(R)$ に適用する．$fT^N\in U(R)$ だから，$N\cdot \mathrm{div}_R(T)=\mathrm{div}_R(f^{-1})$ $\therefore$ $\mathrm{Coker}(\pi^*)\cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
(3.2) より $Cl(R)=0$ だから，

$$0\to Cl(A)\longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha'}\bigoplus_{V}\mathbb{Z}/q_V\mathbb{Z}\to 0$$

は exact.

(3.7) 逆に，A が (3.4) でのような "cyclic quotient singularity" とする．このとき，A は "toric" singularity だから，$Cl(A)\cong\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. $Cl(A)$ の生成元 D として，$T_1,\cdots,T_d$ の monomials で生成される ideal がとれる．$R=R(A,\frac{p}{q}D)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}A(\frac{np}{q}D)\cdot T^n$, p と $Cl(A)$ の位数が互いに素とすると，R は factorial. かつ monomial で記述できるから，R は regular となり cf.[7]，従って，

定理 (3.8). X が体 k 上の projective normal scheme, $D\in\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, ND が ample Cartier divisor $(N>0)$ とする。このとき，もし $R(X,D)$ が孤立特異点なら，X は高々 "cyclic quotient singularity" のみをもつ。逆に，X が "cyclic quotient singularity" のみもつとき，$D\in\mathrm{Div}(X)$ と ND が ample

Cartier divisor ($\exists N>0$), X の各特異点 x に対し, D_x が, $Cl(\mathcal{O}_x)$ の生成元であるようにとれれば, $R(X,D)$ は孤立特異点である。

REFERENCES.

[1] Bourbaki, Algèbre Commutative, Chapter III.

[2] D.L.Costa, Retracts of polynomial rings, J. of Alg. 44, 492 -502 (1977).

[3] M. Demazure, Anneaux gradués normaux, preprint, Ecole Polytechnique, (1979).

[4] H. Flenner, Ratiomale quasi-homogene Singularitäten, Arch. Math. 36 (1981), 35-44.

[5] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[6] S. Mori, Graded factorial doamins, Japan. J. Math. 3 (1977), 223-238.

[7] T. Oda, Lectures on torus embeddings and applications, Tata Inst. Lect. Note 58 (1978).

[8] M.Tomari and K. Watanabe, Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution, in preprint.

[9] K. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.

[10] 渡辺敬一; Normal filtration について, 第7回可換環論シンポジウム報告集 (京都, 1985).

[11] P. Samuel, Lectures on Unique Factorization Domains, Tata Le Note (1964).